Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

24. Oktober 2024

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antwortheft ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8824 – 9715

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

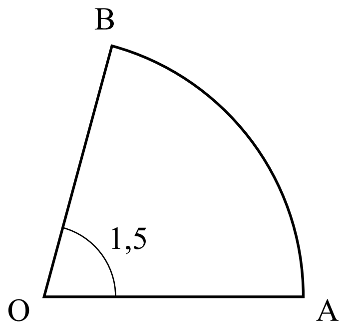
Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Punkte A und B liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $r\,\mathrm{cm}$, wobei $\mathrm{A\hat{O}B} = 1{,}5$ (im Bogenmaß) ist.

Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Die Fläche des Sektors OAB beträgt $48\,\mathrm{cm}^2$.

(a) Finden Sie den Wert von r. [3]

(b) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit den Umfang des Sektors OAB. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

2. [Maximale Punktzahl: 6]

Für die beiden Ereignisse A und B gilt: $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}45$ und $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}85$.

(a) Finden Sie $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(b) Finden Sie $\mathrm{P}(A' \mid B')$. [3]

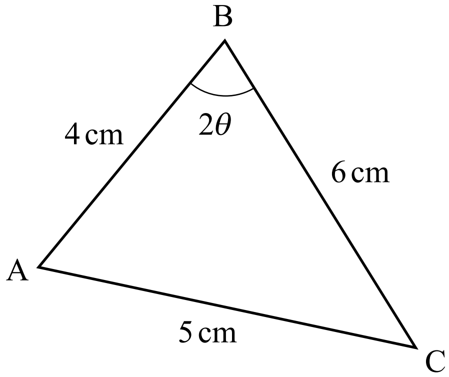
3. [Maximale Punktzahl: 4]

Beweisen Sie, dass $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ ein Vielfaches von 12 ist.

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Die folgende Abbildung zeigt das Dreieck ABC, mit $\text{AB} = 4\,\text{cm}$, $\text{BC} = 6\,\text{cm}$, $\text{AC} = 5\,\text{cm}$ und $\text{A}\hat{\text{B}}\text{C} = 2\theta$.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Finden Sie den exakten Wert von $\cos\theta$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\dfrac{p\sqrt{2}}{q}$ an, mit $p\,,\,q \in \mathbb{Z}^{+}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Maximale Punktzahl: 6]

Für eine bestimmte arithmetische Folge gilt $u_{10} = 16$ und $S_{25} = 100$.

Finden Sie den Wert von k so, dass $u_k = 0$ gilt.

6. [Maximale Punktzahl: 5]

(a) Lösen Sie $2x^2 - 15x + 18 < 0$. [3]

(b) Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = \sqrt{2x^2 - 15x + 18}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \leq k$.

Finden Sie den größten Wert von k, für den f^{-1} existiert und begründen Sie Ihre Antwort. [2]

7. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Funktion $f\left(x\right)=\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ für $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von f. [3]

Die Fläche zwischen dem Graphen von $y=f(x)$, der x-Achse sowie den Geraden $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$ wird um 2π (im Bogenmaß) um die x-Achse gedreht.

(b) Finden Sie das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

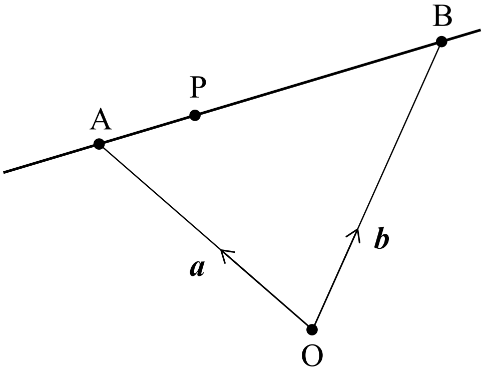
. . . .

. . . .

. . . .

8. [Maximale Punktzahl: 8]

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Punkte A und B, so dass gilt $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$.



Der Punkt P liegt auf (AB), so dass $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ mit $0 < \lambda < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$. [1]

Es gilt: $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ und $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{4}$.

(b) Finden Sie den Wert von λ für den Fall, dass $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ senkrecht zu $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ist. [7]

9. [Maximale Punktzahl: 9]

(a) Beweisen Sie, dass $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{\sin 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$ für $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. [6]

(b) Lösen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$ für $0 \le x \le 2\pi$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

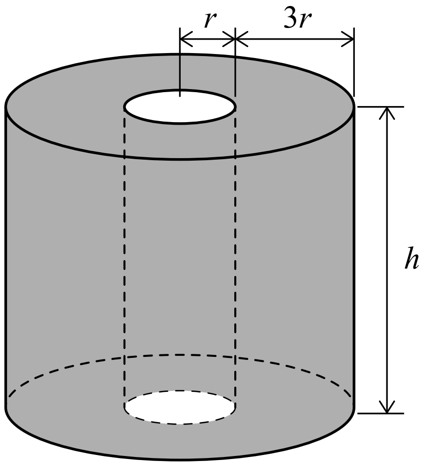
Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 17]

Betrachten Sie einen Zylinder mit dem Radius $4r$ und der Höhe h. Ein kleinerer Zylinder mit dem Radius r wird in der Mitte entfernt, wodurch ein Hohlzylinder entsteht. Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Alle Längen werden in Zentimeter (cm) gemessen.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Die Gesamtoberfläche des Hohlzylinders sei S (in cm^2).

Das Volumen des Hohlzylinders sei V (in cm^3).

(a) Zeigen Sie, dass $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$ gilt. [3]

(b) Die Gesamtoberfläche des Hohlzylinders beträgt $240\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Zeigen Sie, dass $V = 360\pi r - 45\pi r^3$ gilt. [6]

(c) Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$. [2]

Der Hohlzylinder hat sein maximales Volumen für $r = p\sqrt{\frac{2}{3}}$, mit $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) Finden Sie den Wert von p. [3]

(e) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit das maximale Volumen und geben Sie Ihre Antwort in der Form $q\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ an, mit $q \in \mathbb{Z}^+$. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 17]

Eine Kurve ist durch die Gleichung $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ gegeben, mit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hospital oder mittels einer anderen Methode, dass $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = 1$ gilt. [2]

(b) (i) Zeigen Sie, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x} + 1\right)^2}$.

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$ gilt. [6]

(c) (i) Zeigen Sie mit Hilfe der impliziten Ableitung und dem Ergebnis aus Teil (b)(ii), dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y$ gilt.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für $\frac{d^3y}{dx^3}$, abhängig von y. [5]

(d) Finden Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus den Teilen (b) und (c) die Maclaurinsche Reihe für $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ bis einschließlich des x^3-Terms. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 20]

Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = 16\mathrm{i}$, mit $z \in \mathbb{C}$.

Die Gleichung hat die vier Lösungen z_1, z_2, z_3, z_4, mit $z_i = r(\cos\theta_i + \mathrm{i}\sin\theta_i)$, $r > 0$ und $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$.

(a) Finden Sie z_1, z_2, z_3 und z_4. [6]

Die Lösungen z_1, z_2, z_3 und z_4 bilden eine geometrische Folge.

(b) Finden Sie den gemeinsamen Quotienten der Folge und geben Sie Ihre Antwort in kartesischer Form. [3]

Die Lösungen z_1, z_2, z_3 und z_4 werden in einem Argand-Diagramm durch die Punkte A, B, C und D dargestellt.

(c) Tragen Sie die Punkte A, B, C und D in einem Argand-Diagramm ein. [3]

Die Gleichung $v^4 = a + b\mathrm{i}$, mit $v \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, hat die Lösungen z_1^*, z_2^*, z_3^* und z_4^*.

(d) Bestimmen Sie die Werte von a und b. [3]

Der Mittelpunkt von $[\mathrm{AB}]$ sei A', der Mittelpunkt von $[\mathrm{BC}]$ sei B', der Mittelpunkt von $[\mathrm{CD}]$ sei C' und der Mittelpunkt von $[\mathrm{DA}]$ sei D'.

Betrachten Sie die Gleichung $w^p = 2^q$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Vier der Lösungen von $w^p = 2^q$ werden durch die Punkte A', B', C' and D' dargestellt.

(e) Finden Sie den kleinstmöglichen Wert von p und den zugehörigen Wert von q. [5]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.