

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

1. Klausur

24. Oktober 2024

Zone A Nachmittag | Zone B Nachmittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.



Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

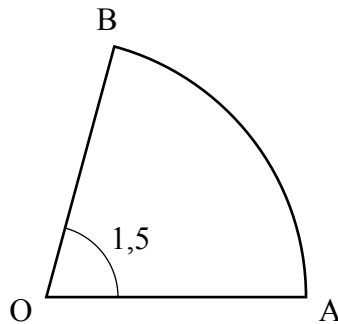
Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Punkte A und B liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r cm, wobei $\widehat{AOB} = 1,5$ (im Bogenmaß) ist.

Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Die Fläche des Sektors OAB beträgt 48 cm^2 .

- (a) Finden Sie den Wert von r . [3]
- (b) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit den Umfang des Sektors OAB. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



(Fortsetzung Frage 1)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Bitte umblättern

2. [Maximale Punktzahl: 6]

Für die beiden Ereignisse A und B gilt: $P(A) = 0,65$, $P(B) = 0,45$ und $P(A \cup B) = 0,85$.

(a) Finden Sie $P(A \cap B)$. [3]

(b) Finden Sie $P(A' | B')$. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Maximale Punktzahl: 4]

Beweisen Sie, dass $(3n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ ein Vielfaches von 12 ist.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

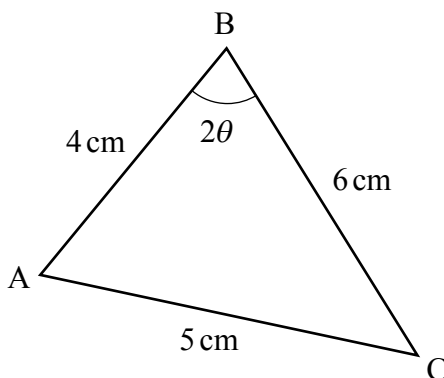


Bitte umblättern

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Die folgende Abbildung zeigt das Dreieck ABC , mit $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ und $\hat{A}BC = 2\theta$.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Finden Sie den exakten Wert von $\cos \theta$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{p\sqrt{2}}{q}$ an, mit $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Maximale Punktzahl: 6]

Für eine bestimmte arithmetische Folge gilt $u_{10} = 16$ und $S_{25} = 100$.

Finden Sie den Wert von k so, dass $u_k = 0$ gilt.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP07

6. [Maximale Punktzahl: 5]

(a) Lösen Sie $2x^2 - 15x + 18 < 0$.

[3]

(b) Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = \sqrt{2x^2 - 15x + 18}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \leq k$.

Finden Sie den größten Wert von k , für den f^{-1} existiert und begründen Sie Ihre Antwort. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von f . [3]

Die Fläche zwischen dem Graphen von $y = f(x)$, der x -Achse sowie den Geraden $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$ wird um 2π (im Bogenmaß) um die x -Achse gedreht.

(b) Finden Sie das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

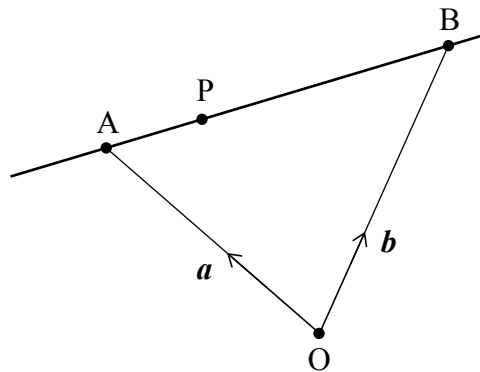
.....

.....



8. [Maximale Punktzahl: 8]

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Punkte A und B, so dass gilt $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$.



Der Punkt P liegt auf (AB), so dass $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$ mit $0 < \lambda < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{OP} = (1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$. [1]

Es gilt: $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}$.

(b) Finden Sie den Wert von λ für den Fall, dass \vec{OP} senkrecht zu \vec{AB} ist. [7]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Maximale Punktzahl: 9]

(a) Beweisen Sie, dass $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{\sin 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$ für $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. [6]

(b) Lösen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

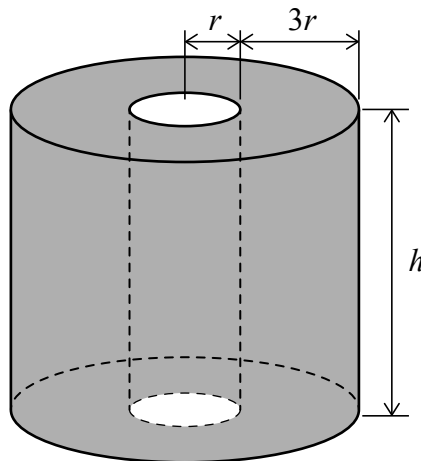
Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 17]

Betrachten Sie einen Zylinder mit dem Radius $4r$ und der Höhe h . Ein kleinerer Zylinder mit dem Radius r wird in der Mitte entfernt, wodurch ein Hohlzylinder entsteht. Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Alle Längen werden in Zentimeter (cm) gemessen.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Die Gesamtoberfläche des Hohlzylinders sei S (in cm^2).

Das Volumen des Hohlzylinders sei V (in cm^3).

(a) Zeigen Sie, dass $S = 30\pi r^2 + 10\pi r h$ gilt. [3]

(b) Die Gesamtoberfläche des Hohlzylinders beträgt $240\pi \text{ cm}^2$.

Zeigen Sie, dass $V = 360\pi r - 45\pi r^3$ gilt. [6]

(c) Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{dV}{dr}$. [2]

Der Hohlzylinder hat sein maximales Volumen für $r = p\sqrt{\frac{2}{3}}$, mit $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) Finden Sie den Wert von p . [3]

(e) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit das maximale Volumen und geben Sie Ihre Antwort in der Form $q\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ an, mit $q \in \mathbb{Z}^+$. [3]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 17]

Eine Kurve ist durch die Gleichung $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ gegeben, mit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hospital oder mittels einer anderen Methode,

dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = 1$ gilt. [2]

(b) (i) Zeigen Sie, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$ gilt. [6]

(c) (i) Zeigen Sie mit Hilfe der impliziten Ableitung und dem Ergebnis aus Teil (b)(ii), dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y$ gilt.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für $\frac{d^3y}{dx^3}$, abhängig von y . [5]

(d) Finden Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus den Teilen (b) und (c) die Maclaurinsche Reihe für $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ bis einschließlich des x^3 -Terms. [4]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 20]

Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = 16i$, mit $z \in \mathbb{C}$.

Die Gleichung hat die vier Lösungen z_1, z_2, z_3, z_4 , mit $z_i = r(\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$, $r > 0$ und $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$.

(a) Finden Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 . [6]

Die Lösungen z_1, z_2, z_3 und z_4 bilden eine geometrische Folge.

(b) Finden Sie den gemeinsamen Quotienten der Folge und geben Sie Ihre Antwort in kartesischer Form. [3]

Die Lösungen z_1, z_2, z_3 und z_4 werden in einem Argand-Diagramm durch die Punkte A, B, C und D dargestellt.

(c) Tragen Sie die Punkte A, B, C und D in einem Argand-Diagramm ein. [3]

Die Gleichung $v^4 = a + bi$, mit $v \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, hat die Lösungen z_1^*, z_2^*, z_3^* und z_4^* .

(d) Bestimmen Sie die Werte von a und b . [3]

Der Mittelpunkt von $[AB]$ sei A' , der Mittelpunkt von $[BC]$ sei B' , der Mittelpunkt von $[CD]$ sei C' und der Mittelpunkt von $[DA]$ sei D' .

Betrachten Sie die Gleichung $w^p = 2^q$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Vier der Lösungen von $w^p = 2^q$ werden durch die Punkte A', B', C' and D' dargestellt.

(e) Finden Sie den kleinstmöglichen Wert von p und den zugehörigen Wert von q . [5]



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



16EP15

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



16EP16